10 класс.

1. Пусть $s(n)$ обозначает сумму цифр (в десятичной записи) натурального числа n. Найдите все натуральные n, для которых $n+s(n)=2011$.
Ответ: 1991**. Указание.** См. задачу 2 для 9 класса**.**

2. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $|x^3 - a^3| = x - a$ имеет три различных корня.

Ответ. $\frac{-2}{\sqrt{3}} < a < \frac{-1}{\sqrt{3}}$. **Указание.** Уравнение имеет корень $x=a$. При $x \neq a$ сократим обе части уравнения на $x - a$. Тогда при $x>a$ в левой части получим $x^2 + xa + a^2$, а при $x<a$ в левой части будет $-(x^2 + xa + a^2)$. Итак, при $x \neq a$ имеем совокупность двух систем:
$\begin{cases} x > a \\ x^2 + xa + a^2 = 1 \end{cases}$, либо $\begin{cases} x < a \\ x^2 + xa + a^2 = -1 \end{cases}$. Вторая система не имеет решений, т.к. дискриминант ее квадратного уравнения $D = -3a^2 - 4 < 0$. Корни квадратного уравнения первой системы равны $\left(-a \pm \sqrt{4 - 3a^2}\right)/ 2$. Условие того, что оба 'этих корня больше a, равносильно неравенству $\frac{-a - \sqrt{4 - 3a^2}}{2} > a \Leftrightarrow$

$$\sqrt{4-3a^2} < -3a \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ 0 < 4 - 3a^2 < 9a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \frac{1}{3} < a^2 < \frac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{-2}{\sqrt{3}} < a < \frac{-1}{\sqrt{3}}.$$

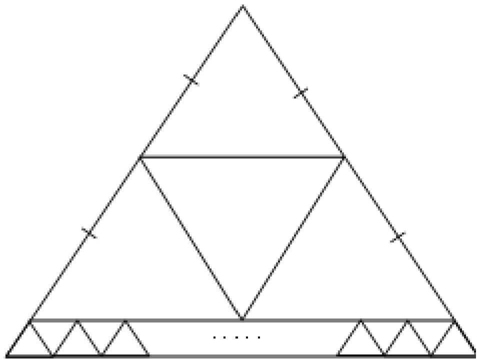
3. В треугольнике ABC угол A равен 60^0, расстояния от вершин B и C до центра вписанной окружности треугольника ABC равны, соответственно, 3 и 4. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC. .

Ответ. $\sqrt{\frac{37}{3}}$. **Указание.** См. задачу 4 для 9 класса**.**

4. Единичный квадрат первой четверти на координатной плоскости ($0 \le x, y \le 1$) разбит на квадратики со стороной $2 \cdot 10^{-4}$. Сколько узлов этого разбиения (внутри единичного квадрата) лежит на параболе $y = x^2$?.
Ответ. 49. **Указание.** См. задачу 5 для 9 класса**.**

5. **а**) Докажите, что равносторонний треугольник можно разбить на 2011 равносторонних треугольников. **б**) Можно ли добиться того, чтобы в искомом разбиении длины сторон разных треугольников принимали лишь два различных значения?
Ответ: б) да, можно**. Указание**. **а**) Конечно, пункт а) следует из положительного ответа пункта б), но можно привести независимое решение. Средними линиями равносторонний треугольник разбивается на 4 равносторонних треугольника, т.е число треугольников увеличивается на 3. Разбивая любой из получившихся треугольников на 4 равносторонних, мы будем иметь разбиение из 7 треугольников, и так далее: т.е. можно таким образом получить разбиение исходного треугольника на $3n+1$ равносторонних треугольников для любого n.

б) Пусть дан равносторонний треугольник ABC с единичной стороной. Разобьём основание AC на 1004 равные части и возьмём точки A_1 и C_1 на сторонах AB и CB, соот-



ветственно, на расстоянии 1/1004 от точек A и C. Полосу между параллельными прямыми AC и A_1C_1 в треугольнике ABC можно разбить на 1004+1003=2007 равносторонних треугольников со стороной 1/1004 (см. рисунок). Оставшаяся часть треугольника ABC представляет собой равносторонний треугольник со стороной 1003/1004, который средними линиями разбивается на 4 равносторонних треугольника. В результате получится искомое разбиение из 2011 треугольников со сторонами либо .1/1004, либо 1003/2008.

10 класс

10.1. Даны три положительных числа, обладающих тем свойством, что произведение любых двух из них больше третьего на одно и то же число a. Докажите, что $a \geq -\frac{1}{4}$.

Указание. См. задачу 9.1

10.2. Какому наименьшему положительному числу может равняться старший коэффициент квадратного трехчлена $P(x)$, принимающего целочисленные значения при всех целых x?

Ответ: $\frac{1}{2}$. **Указание.** Пусть $P(x) = ax^2 + bx + c$. Тогда $c = P(0)$ – целое число. Подставляя $x = \pm 1$, получим, что $P(-1) + P(1) = 2a + 2c$. Значит, $2a$ – целое число, и поэтому $|a| \geq \frac{1}{2}$. Значение $a = \frac{1}{2}$ достигается, например, для трехчлена $P(x) = \frac{x(x+1)}{2}$.

10.3. На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC во внешнюю сторону построен квадрат (т.е. AB – сторона этого квадрата). Пусть O – центр квадрата. Докажите, что отношение длины AO к сумме катетов $AC + CB$ есть величина постоянная для всех прямоугольных треугольников и найти это отношение.

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **Указание.** Результат получается прямым подсчетом с использованием теоремы косинусов (и формулы $\cos(\alpha + 45°)$) в треугольнике ACO.

10.4. Для четырехугольника $ABCD$, вписанного в окружность радиуса R, выполняется. $AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 = 8R^2$. Можно ли утверждать, что хотя бы одна из диагоналей $ABCD$ является диаметром окружности?

Ответ: нет. **Указание.** См. задачу 9.4

10.5. Докажите, что из любых десяти целых чисел можно выбрать два числа, разность кубов которых делится на 27.

Указание. Из десяти чисел найдутся два, имеющие одинаковый остаток при делении на 9. Пусть это будут числа a и b. Тогда $b = a + 9k$ при некотором целом k. Отсюда: $b^3 = a^3 + 3^3 a^2k + 3^5ak^2 + 3^6k^3$, т.е. $b^3 - a^3$ делится на 27.